Apuntes de los días 20-10 y 31-10:

Considere la curva dada por $F := x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{C}[x, y]$.

El conjunto de ceros de este polinomio en $\mathbb{R}^2$ es el círculo unitario.

FIGURA 1. Círculo Unitario

Veamos que todo punto P en F es simple (o no singular). Los puntos singulares $P = (x, y)$ en F (si es que existen) son soluciones al sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2 + y^2 = 1 & (\text{ equivale a estar en la curva } F = 0) \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 0 & \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0 & \end{array} \right\}$$

Como las últimas ecuaciones implican que $x = y = 0$, pero como $(x, y) = (0, 0)$ no es solución de la primera ecuación.
Veamos que esta curva no tiene puntos singulares (o múltiples). Entonces, esta curva es no singular. En particular, si $P = (a, b) \in F$, la recta tangente a F en P es dada por la ecuación:

$$\begin{aligned} 2a(x-a) + 2b(y-b) &= 0 \\ \Rightarrow \ ax - a^2 + by - b^2 &= 0 \\ \Rightarrow \ ax + by &= \underbrace{a^2 + b^2}_{=1} \\ \Rightarrow \ ax + by &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 0.1. Considere la cúbica cuspidal, dada por $F := y^2 - x^3 \in \mathbb{C}[x, y]$. Su gráfico en $\mathbb{R}^2$ es

FIGURA 2. Cúbica Cuspidal

Los puntos singulares de F son las soluciones al sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y^2 = x^3 & \\ \frac{\partial F}{\partial x} = -3x^2 = 0 & \Rightarrow \ x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0 & \Rightarrow \ y = 0 \end{array} \right.$$

Y en efecto $(0, 0)$ es solución de $y^2 = x^3$.
Por lo tanto, solo el origen $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es un punto singular de esta curva.
En $(0, 0)$ no se encuentra definida la recta tangente, sin embargo, se observa de la figura, que el eje x, cuya ecuación es $G = y$, parece ser tangente a la curva.
Si$P = (a, b) \in F$ es un punto simple de F , entonces la recta tangente a F en P es dada por la ecuación

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(P)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\cdot(y-b)&=0\\
\Rightarrow -3a^2(x-a)+2b(y-b)&=0\\
\Rightarrow -3a^2x+3a^3+2by-2b^2=0\ ,\qquad a,b\in F\Rightarrow b^2&=a^3\\
\Rightarrow -3a^2x+2by&=-a^3
\end{aligned}
$$

$\diamond$

Ejemplo 0.2. Considere la cúbica nodal, dada por $F := y^2 - x^3 - x^2 \in \mathbb{C}[x, y]$. Su gráfico en $\mathbb{R}^2$ es

FIGURA 3. Cúbica Nodal

Los puntos singulares (o multiples) de F son las soluciones al sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
y^2 = x^3 + x^2 \\
\frac{\partial F}{\partial x} = -3x^2 - 2x = 0 \ \Rightarrow\ -x(3x+2) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \text{ ó } x = \frac{-2}{3} \\
\frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ y = 0
\end{cases}
$$

Como $y = 0$, la primera ecuación implica que

$$
\begin{aligned}
x^3 + x^2 = 0 \ &\Rightarrow\ x^2(x+1) = 0\\
&\Rightarrow\ x = 0 \ \text{ ó } \ x = -1
\end{aligned}
$$

Vemos entonces que la única solución de este sistema es $x = y = 0$. Entonces el origen es el único punto singular (o múltiple).Recordemos que en $\mathbb{R}^2$ habíamos parametrizado esta curva por la función:

$$
\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\right\}\\
t &\mapsto \left(t^2 - 1, t - t^3\right)
\end{aligned}
$$

Además, esta parametrización recorre la curva en dirección descendente como en la figura siguiente:

FIGURA 4. Dirección de la parametrización φ para la cúbica nodal.

En particular, la parametrización pasa por el origen dos veces, a saber, cuando $t = -1$ y $t = 1$. Note que si restringimos la parametrización a los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ obtenemos dos ramas de la cúbica nodal. Específicamente, sean:

$$
\begin{aligned}
\varphi_- : (-\infty, 0) &\longrightarrow \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\right\}\\
t &\mapsto (t^2 - 1, t - t^3)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\varphi_+ : (0, +\infty) &\longrightarrow \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\right\}\\
t &\mapsto (t^2 - 1, t - t^3)
\end{aligned}
$$

Entonces φ_- describe la rama

FIGURA 5. Rama de φ_-

y φ_+ describe la rama

FIGURA 6. Rama de φ_+

En cada caso, se puede encontrar la ecuación de la recta tangente a cada rama en el origen. Estas tangentes, denotadas por ℓ_- y ℓ_+ , son dadas por la ecuación paramétrica.

$$\begin{aligned}
\ell_- &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = t \cdot \varphi'_-(-1) + (0,0)\ ,\ \text{ para } \ t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = t \cdot (-2,-2)\ ,\ \text{ para } \ t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -2t, y = -2t\ ,\ \text{ para } \ t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\ell_+ &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = t \cdot \varphi'_+(1) + (0,0)\ ,\ \text{ para } \ t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = t \cdot (2,-2)\ ,\ \text{ para } \ t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2t, y = -2t\ ,\ \text{ para } \ t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\right\}
\end{aligned}$$

Entonces, vemos que las rectas tangentes a cada rama en el origen son
$\ell_- : \quad y = x \Rightarrow$
$\ell_+ : \quad y = -x \Rightarrow$

FIGURA 7. Gráfico de ℓ_+ y ℓ_-

Observe que las ecuaciones de estas rectas tangentes a cada rama se pueden obtener la ecuación original que define a la cúbica nodal. A saber, si escribimos $f = y^2 - x^3 - x^2$ como suma de polinomios homogéneos:

$$F = F_{(0)} + F_{(1)} + F_{(2)} + F_{(3)}\ \ ,\ \text{ con } \ F_{(i)} \text{ de grado } i$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
F_{(0)} &= 0 \\
F_{(1)} &= 0 \\
F_{(2)} &= y^2 - x^2 \\
F_{(3)} &= -x^3
\end{aligned}$$

Entonces,

$$F = F_{(2)} + F_{(3)}$$

y $F_{(2)}$ es el componente homogéneo de menor grado tal que $F_{(i)} \neq 0$

Note que $F_{(2)}$ se factoriza en $\mathbb{C}[x,y]$ como $F_{(2)} = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$ $\diamond$

Ejemplo 0.3. Puede ocurrir, bajo nuestra nueva definición de una curva algebraica afín, que la curva tenga infinitos puntos singulares o múltiples. En particular, puede ocurrir que todo los puntos de la curva sean singulares.
Por ejemplo, si $F \in \mathbb{C}[x,y]$ define una curva y si su factorización en irreducibles

$$F = F_1^{e_1} \cdots F_r^{e_r}$$

contiene factores repetidos, es decir, si algún $e_j > 1$, entonces todos los puntos de la subcurva F_j serán puntos singulares de F .
Para ver esto, note que F tiene factores repetidos si y solo si F no es libre de cuadrados, es decir, si y solo si existen polinomios no constantes $G, H \in \mathbb{C}[x,y]$ tales que

$$F = G^2 \cdot H$$

Entonces, se tiene que

$$V_{\mathbb{C}}(F) = V_{\mathbb{C}}(G^2) \cup V_{\mathbb{C}}(H)$$

En este caso, todos los puntos de la subcurva G^2 serán puntos singulares de F .
Para ver esto, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial (G^2)}{\partial x} \cdot H + G^2 \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \\ &= 2G \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \cdot H + G^2 \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

Y similarmente $\frac{\partial F}{\partial y} = 2G \cdot \frac{\partial G}{\partial y} \cdot H + G^2 \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$

Por lo tanto, si $P \in G^2$, esto quiere decir $G(P) = 0$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = 2\cancelto{0}{G(P)} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \cdot H(P) + \cancelto{0}{G^2(P)} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(P) = 2\cancelto{0}{G(P)} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} \cdot H(P) + \cancelto{0}{G^2(P)} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Esto muestra que todo punto de G^2 es un punto singular de F. $\diamond$

Por otro lado, se puede demostrar que si F es libre de cuadrados entonces F solo posee una cantidad finita (posiblemente cero) de puntos singulares.

Habiendo visto algunos ejemplos, vamos a dar ahora la definición de la multiplicidad de una curva en el origen.

Definición 0.4. Sea F una curva algebraica afín y sea $P = (0,0)$. Sea $grad(F) = n$ y sea

$$F = F_{(0)} + F_{(1)} + \ldots + F_{(n)}$$

la descomposición de F en componentes homogéneos.
Definimos la multiplicidad de F en $P = (0,0)$ como

$$m_p(F) = m_{(0,0)}(F) := \min\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid 0 \leq m \leq n \text{ y } F_{(m)} \neq 0\}$$

$\blacklozenge$

Esto quiere decir que $P = (0,0) \in F \Leftrightarrow m_p(F) = 1$.
Se puede demostrar fácilmente que $P = (0,0)$ es un punto simple (no singular) de $F \Leftrightarrow m_p(F) = 1$.
En este caso, también se puede mostrar sin mayor deficultad que el componente homogéneo $F_{(1)}$ define a la recta tangente a F en $P = (0,0)$.
Notación: sea $P = (0,0)$ y sea Funa curva

Si $m_p(F) = 1$ diremos que P es un punto simple.

Si $m_p(F) = 2$ diremos que P es un punto doble.
Si $m_p(F) = 3$ diremos que P es un punto triple.
y así en general.

Definición 0.5. Sea $P = (0,0)$ y sea F una curva de multiplicidad $m = m_p(F) \geq 1$ en el origen. Entonces su componente homogéneo $F_{(m)} \neq 0$ y es homogéneo de grado m. Por el T.F.A para polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[x,y]$, se tiene que

$$f_{(m)} = \prod_{k=1}^{m} (\alpha_k x + \beta_k y)$$

para algunos $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_m, \beta_m \in \mathbb{C}$. Si juntamos los factores repetidos, esta factorización se puede escribir como

$$f_{(m)} = \prod_{k=1}^{r} L_k^{e_k}$$

donde los L_k son los polinomios homogéneos lineales no asociados (ninguno de ellos divide al otro) y $e_1 + \ldots + e_r = m$

Los factores lineales L_k definen curvas de grado 1 que llamaremos las *rectas tangentes* a F en $P = (0,0)$.

Además, decimos que el entero e_k es la *multiplicidad de la recta tangente* L_k y en general si esta multiplicidad es

- $e_k = 1$ diremos que L_k es una recta tangente simple.
- $e_k = 2$ diremos que L_k es una recta tangente doble, etc.

♦

Definición 0.6. Sea $P = (0,0)$ y sea F una curva con multiplicidad $m = m_p(F) > 1$ en el origen. si todas las rectas tangentes L_k son simples, es decir, si F tiene m tangentes distintas en $P = (0,0)$ diremos que $P = (0,0)$ es un *punto múltiple ordinario.* ♦

En particular, un punto doble ordinario se conoce como nodo.
A veces se dice que una recta que pasa por P pero no sea tangente a F en P es una tangente de multiplicidad cero.

Ejemplo 0.7. Sea $F = y^2 - x^3 - x^2$ (la cúbica nodal). Su descomposición en componentes homogéneos es $F = F_{(2)} + F_{(3)}$, con $F_{(2)} = y^2 - x^2$ y $F_{(3)} = -x^3$. Vemos que la multiplicidad de F en el origen es $m_{(0,0)}(F) = 2$. Además, como $F_{(2)} = (y-x)(x+y)$, las rectas tangentes a F en el origen son $y = x$ y $y = -x$.
Como estas rectas son distintas, vemos que $P = (0,0)$ es un punto doble ordinario, es decir, que el origen es un nodo.

◇

Todas estas definiciones de multiplicidad y rectas tangentes se pueden dar para un punto arbitrario (a,b) , como hacemos a continuación.

Definición 0.8. Sea $P = (a,b) \in \mathbb{C}^2$ y sea $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ traslación $T(x,y) := (x+a, y+b)$ que mapea el origen en el punto $P = (0,0)$. Definimos, la *multiplicidad*, de una curva F en $P = (0,0)$ como $m_p(F) = m_{(0,0)}(F^T)$, donde $F^T := F \circ T = F(T(x,y)) = F(x+a, y+b)$. Además, si la descomposición de F^T en componente homogéneos es $F^T = G_m + \ldots + G_n$, donde $m = m_p(F)$ y $n = grad(F)$ y si factorizamos $G_m = \prod_{k=1}^{r} L_k^{e_k}$, con $L_k = \alpha_k x + \beta_k y$, para algunos $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$ entonces definimos *las rectas tangentes* a F en $P = (0,0)$ como las rectas

$$L_k^{T^{-1}} = L_k \circ T^{-1} = L_k(x-a, y-b) = \alpha_k(x-a) + \beta_k(y-b)$$

Al igual que antes, decimos que e_k es *la multiplicidad de la tangente*

$$L_k^{T^{-1}} = \alpha_k(x-a) + \beta_k(y-b)$$

y similarmente matenemos la terminología que se introdujo anteriormente para el caso $P = (0,0)$.

♦

Ejemplo 0.9. Considere la cúbica nodal $F = y^2 - x^3 - x^2$. Recuerde que su gráfico en $\mathbb{R}^2$ es el siguiente:

FIGURA 8. Cúbica Nodal

Sea $P = (0,0)$ un punto arbitrario en F . Vamos a ver que

$$m_p(F) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad P \neq (0,0) \\ \\ 2 & \text{si} \quad P = (0,0) \end{cases}$$

Sea T la traslación $T(x,y) = (x+a, y+b)$. Luego:

$$\begin{aligned} F^T &= F(x+a, y+b) = (y+b)^2 - (x+a)^3 - (x+a)^2 \\ &= y^2 + 2by + b^2 - x^3 - 3ax^2 - 3a^2x - 3a^2x - a^3 - x^2 - 2ax - a^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, su descomposición en componentes homogéneos es
$F^T = G_{(0)} + G_{(1)} + G_{(2)} + G_{(3)}$ con
$G_{(0)} = b^2 - a^3 - a^2 = F(a,b) = 0$ (pues $(a,b) \in F$)
$G_{(1)} = 2by - 3a^2x - 2ax = -a(3a+2)x + 2by$
$G_{(2)} = y^2 - 3ax^2 - x^2 = -(3a+1)x^2 + y^2$
$G_{(3)} = -x^3$

Note que por definición, $m_p(F) = m_{(0,0)}(F^T) = min\,\{m \mid m = 0,1,2,3\}$ con la condición de que $G_{(m)} \neq 0$.

Ya sabemos que $G_{(m)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a(3a+2) & = & 0 \\ \\ b & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$ ó $a = \frac{-2}{3},\ b = 0$

Sin embargo, el punto $(a,b) = \left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ no está en la curva F. ◇