Ejemplo 0.1. Sea $F = y^2 - x^3 - x^2 \in \mathbb{C}[x, y]$. Recuerde que el gráfico en $\mathbb{R}^2$ de esta curva es

FIGURA 1. Curva Eliptica de ecuación $F = y^2 - x^3 - x^2 \in \mathbb{C}[x, y]$

Vamos a calcular, la multiplicidad de un punto arbitrario $P = (0, 0) \in F$. Es más, vamos a ver que

$$m_p(F) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad P \neq (0,0) \\ 2 & \text{si} \quad P = (0,0) \end{cases}$$

Además, veremos que el origen $P = (0, 0)$ es un punto doble ordinario, es decir, un nodo.

Para calcular la multiplicidad, sea T la traslación $T(x, y) = (x + a, y + b)$ que " mapea " el origen $(0, 0)$ en $P = (a, b)$.

Luego,

$$\begin{aligned} F^T = F \circ T &= F\left(T(x,y)\right) = F(x+a, y+b) \\ &= (y+b)^2 - (x+a)^3 - (x+a)^2 \\ &= y^2 + 2by + b^2 - x^3 - 3ax^2 - 3a^2x - 3a^2x - a^3 - x^2 - 2ax - a^2 \end{aligned}$$

Entonces, la descomposición de F^T en componentes homogéneos es

$$\begin{aligned} F^T = G_{(0)} + G_{(1)} + G_{(2)} + G_{(3)} \text{ con} \\ G_{(0)} = b^2 - a^3 - a^2 = F(a,b) = 0 \text{ (pues } (a,b) \in F) \\ G_{(1)} = 2by - 3a^2x - 2ax = -a(3a+2)x + 2by \\ G_{(2)} = y^2 - 3ax^2 - x^2 = -(3a+1)x^2 + y^2 \\ G_{(3)} = -x^3 \end{aligned}$$

Entonces, como

$$m_p(F) = m_{(0,0)}(F^T) = min\,\{m \mid m = 0,1,2,3\} \ , \ G_{(m)} \neq 0$$

debemos analizar cuando $G_{(m)} \neq 0$

Ya vimos que $G_{(0)}$ para todo $P = (a, b) \in F$ y además, que $G_{(2)} \neq 0 \neq G_{(3)}$ para todo $P = (a, b) \in F$

Por esto, ya sabemos que

$$1 \leq m_p(F) \leq 2$$

Debemos, sin embargo, estudiar cuando es cero el componente $G_{(1)}$

Note que

$$\begin{aligned} G_{(1)} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a(3a+2) & = \quad 0 \\ b & = \quad 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad a = b = 0 \quad \text{ó} \quad a = \tfrac{-2}{3} \quad \text{y} \quad b = 0 \end{aligned}$$

Esto nos da los puntos $(a,b)=(0,0)$ y $(a,b)=\left(\frac{-2}{3},0\right)$
Sin embargo el punto $\left(\frac{-2}{3},0\right)$ no pertenece a F pues $F\left(\frac{-2}{3},0\right)=0^2-\left(\frac{-2}{3}\right)^3-\left(\frac{-2}{3}\right)^2=\frac{-4}{27}\neq 0$ por lo que
$G_{(1)}=0 \Longrightarrow P=(a,b)=(0,0)$
Esto, combinado con el hecho de que $G_{(0)}=0\ \forall P$ y $G_{(2)}\neq 0\ \forall P$ nos muestra que:

$$m_p(F)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad P\neq(0,0) \\ \\ 2 & \text{si} \quad P=(0,0) \end{cases}$$

Finalmente, en el origen, las tangentes a la curva corresponden a los factores lineales en la factorización

$$G_{(2)}=y^2-x^2=(y-x)(y+x) \quad \text{(sustituyo “a” por cero)}$$

es decir, las rectas

$$y=x \quad \text{y} \quad y=-x$$

Como estas son distintas, concluimos que $(0,0)$ es un punto doble ordinario, es decir , un nodo. ◇

Ejemplo 0.2. Sea $F:=x^4+y^3-x^2y\in\mathbb{C}[x,y]$ la curva del lazo (en inglés “ bow curve ”). Su gráfico en $\mathbb{R}^2$ es el siguiente:

FIGURA 2. Curva de ecuación $F:=x^4+y^3-x^2y\in\mathbb{C}[x,y]$

Recuerde que esta curva se puede graficar en Sagemath (Cocalc) con el siguiente código :

```
Var(' y ')
implicit _ plot (x^4 + y^3 - x^2 y == 0, (x,-2,2),(y , -2 ,2))
```

Claramente, el gráfico nos muestra que el origen es un punto singular y que al menos en $\mathbb{R}^2$, hay tres tangentes a la curva en el origen.
Vamos a mostrar de hecho, que si $P\in F$, entonces

$$m_p(F)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad P\neq(0,0) \\ \\ 3 & \text{si} \quad P=(0,0) \end{cases}$$

Además, veremos que $P=(0,0)$ es un punto triple ordinario, es decir, que en efecto hay tres tangentes a F ,distintas, en el origen.
Sea $P=(a,b)\in F$ y sea $T(x,y)=(x+a,y+b)$ la translación que mapea $(0,0)$ en (a,b) . Entonces

$$\begin{aligned} F^T=F\circ T &= F(x+a,y+b) \\ &= (x+a)^4+(y+b)^3-(x+a)^2(y+b) \\ &= x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4+y^3+3by^2+3b^2y+b^3 \\ &\quad -x^2y-2axy-a^2y-bx^2-2abx-a^2b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la descomposición de F^T en componentes homogéneos es

$$F^T=G_{(0)}+G_{(1)}+G_{(2)}+G_{(3)}+G_{(4)}$$

Donde

$$\begin{aligned}
G_{(0)} &= a^4 + b^3 - a^2 b = F(a,b) = 0 \\
G_{(1)} &= 4a^3 x + 3b^2 y - a^2 y - 2abx \\
&= 2a(2a^2 - b)x + (3b^2 - a^2) \\
G_{(2)} &= 6a^2 x^2 + 3by^2 - bx^2 - 2axy \\
&= (6a^2 - b)x^2 + 3by^2 - 2axy \\
G_{(3)} &= 4ax^3 + y^3 - x^2 y \\
G_{(3)} &= x^4
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
G_{(0)} &= 0\ ,\ \forall P \\
G_{(3)} &\neq 0\ ,\ \forall P \\
G_{(4)} &\neq 0\ ,\ \forall P
\end{aligned}$$

Debemos estudiar los polinomios $G_{(1)}$ y $G_{(2)}$.
$G_{(1)}$:
Note que

$$G_{(1)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a(2a^2 - b) = 0 & \Longrightarrow \quad a = 0 \quad \text{ó} \quad b = 2a^2 \\ 3b^2 - a^2 = 0 & \Longrightarrow \quad 3b^2 = a^2 \end{cases}$$

Si $a = 0$ entonces $b = 0$,lo que da el punto $(a,b) = (0,0)$
Si $b = 2a^2$ de la primera ecuación esto da $a^2 = \frac{b}{a}$. Al sustituir esto en la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}
3b^2 = \tfrac{b}{2} \Rightarrow 6b^2 - b = 0 \quad &\Rightarrow \quad b(6b-1) \\
&\Rightarrow \quad b = 0 \quad \text{ó} \quad b = \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

Si $b = 0$, se obtiene el punto $(a,b) = (0,0)$
Si $b = \frac{1}{6}$, se tiene que $a^2 = \frac{b}{2} = \frac{1}{12} \Rightarrow a = \mp\frac{1}{\sqrt{12}}$
Esto da los puntos:

$$(a,b) = \begin{cases} (0,0) \\ \left(\mp\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) \end{cases}$$

Sin embargo, note que

$$F\left(\mp\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) = \left(\mp\frac{1}{12}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\mp\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{432} \neq 0$$

por lo que los puntos $\left(\mp\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$ no están en la curva.
Concluímos que

$$G_{(1)} = 0 \Leftrightarrow P = (0,0)$$

$G_{(2)}$:
Note que

$$G_{(2)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6a^2 - b & = & 0 \\ 3b & = & 0 \\ -2a & = & 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

Es decir,

$$G_{(2)} = 0 \Leftrightarrow P = (0,0)$$

Entonces, resumiendo, hemos visto que

$$\begin{array}{rcl} G_{(0)} & = & 0\ ,\ \forall P \in F \\ G_{(1)} & = & 0 \ \Leftrightarrow \ P = (0,0) \\ G_{(2)} & = & 0 \ \Leftrightarrow \ P = (0,0) \\ G_{(3)} & \neq & 0\ ,\ \forall P \in F \\ G_{(4)} & \neq & 0\ ,\ \forall P \in F \end{array}$$

Por lo tanto,

$$m_p(F) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad P \neq (0,0) \\ 3 & \text{si} \quad P = (0,0) \end{cases}$$

Para determinar las rectas tangentes a F en un punto P usamos un polinomio homogéneo $G_{(1)}$ si $P = (a,b) \neq (0,0)$, $G_{(3)}$ si $P = (0,0)$.

Para $P = (a,b) \neq (0,0)$, el punto es simple, así que solo hay una tangente $G_{(1)}(x-a, y-b) = 2a(2a^2 - b)(x-a) + (3b^2 - a^2)(y-b)$

Note que la recta en efecto corresponde a la recta

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y-b) = 0$$

pues $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 2xy \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(P) = 4a^3 - 2ab = 2a(2a^2 - b)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 3b^2 - a^2$

Por otro lado, si $P = (0,0)$, entonces

$$G_{(3)} = 4ax^3 + y^3 - x^2y = y^3 - x^2y$$

y este polinomio se factoriza como producto de factores lineales de la forma

$$G_{(3)} = y^3 - x^2y = y(y^2 - x^2) = y(y-x)(y+x)$$

Entonces hay 3 tangentes distintas en el origen, que son las rectas

$$y = 0\ ,\ y = x\ ,\ y = -x$$

correspondientes a cada factor lineal de $G_{(3)}$

Concluímos que $P = (0,0)$ es el único punto múltiple de la curva de lazo, y que este es el punto triple ordinario. $\diamond$

EJERCICIOS

Ejercicios de la sección 0. En los siguientes ejercicios, todas las curvas algebraicas consideradas son representadas por polinomios $F \in \mathbb{C}[x, y]$.

0.1 Demuestre que las siguientes curvas algebraicas afines son no singulares.

(a) $F = y - x^2$
(b) $F = y^2 - x^3 - x$

Use `SageMath` para graficar los puntos reales de estas curvas.

0.2 Encuentre todos los puntos múltiples de las siguientes curvas algebraicas. Además, calcule la multiplicidad de cada punto múltiple y encuentre las rectas tangentes a la curva en dichos puntos. En cada caso, indique si el punto singular es ordinario o no.

(a) $F = x^3 - x^2 + y^3 - y^2 + 3x^2y + 3xy^2 + 2xy$.
(b) $F = x^4 + y^4 - x^2y^2$.
(c) $F = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 3xy + 1$.
(d) $F = y^2 + (x^2 - 5)(4x^4 - 20x^2 + 25)$.

Además, en cada caso, grafique los puntos reales en $\mathbb{R}^2$ de cada curva con `SageMath`.

0.3 Sea $F \in \mathbb{C}[x, y]$ una curva de grado n y sea $P \in \mathbb{C}^2$. Demuestre que $m_P(F) = m$ para un entero $0 \leq m \leq n$ sí y solo sí m es el menor entero tal que existen $0 \leq i, j \leq n$ con $m = i + j$ y

$$\frac{\partial^m F}{\partial x^i \partial y^j}(P) \neq 0.$$

Además, si $P = (a, b)$ y $T(x, y) = (x + a, y + b)$ es la traslación que envía el origen $(0, 0)$ al punto P y si $F^T = G_{(m)} + \cdots + G_{(n)}$ es la descomposición de F^T en componentes homogéneos, encuentre una fórmula explícita en términos de derivadas parciales para $G_{(m)}$.

0.4 Sea $F \in \mathbb{C}[x, y]$ una curva algebraica y sea $P \in F$. Demuestre que P es un punto simple de F sí y solo sí $m_P(F) = 1$.

0.5 Sea $F \in \mathbb{C}[x, y]$ una curva algebraica y sea $P \in F$. Demuestre que P es un nodo sí y solo sí

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(P)\right)^2 \neq \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P).$$

0.6 Sea $F = (x^2+y^2)^2 - x^2y - y^3$. Grafique los puntos reales de esta curva usando `SageMath`. Encuentre la multiplicidad de un punto arbitrario $P = (a, b) \in F$.

0.7 Demuestre que la ecuación polar $r = -\operatorname{sen}(3\theta)$ describe los puntos en $\mathbb{R}^2$ de la curva algebraica $F = (x^2 + y^2)^2 - x^2y - y^3$.

0.8 Sea $F = (y^2 - x^2)(x - 1)(2x - 3) - 4(x^2 + y^2 - 2x)^2$. Grafique los puntos reales de esta curva usando `SageMath` (esta curva se conoce como la *curva ampersand* por el parecido de su gráfico con el símbolo &, llamado *ampersand* en inglés, o *et* en español). Encuentre la multiplicidad de un punto arbitrario $P = (a, b) \in F$ y además encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos múltiples o singulares.