



Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática



Carta al estudiante
MA-0702 Variable Compleja
I-ciclo 2018

Profesor: Adrián Barquero Sánchez

email: adrianbs11@gmail.com

Oficina: 327 Edificio Anexo de Matemática/CIMPA.

Horas de Consulta: Martes 9:00 - 12:00 o con cita previa.

Descripción del curso: Este es un curso introductorio al análisis complejo o más específicamente, a la teoría de las funciones de una variable compleja. El análisis complejo es una de las áreas más importantes de las matemáticas modernas, en especial por la utilidad y aplicabilidad de sus resultados más poderosos a diversas áreas de las matemáticas. La famosa frase de J. Hadamard al respecto ilustra perfectamente este sentimiento:

“El camino más corto entre dos verdades en el dominio real pasa por el dominio complejo.”

A lo largo del curso, estudiaremos distintas aplicaciones, por ejemplo, al cálculo de integrales reales, a la evaluación de algunas sumas infinitas y hacia el final del curso, culminaremos nuestro estudio viendo algunas propiedades básicas de la función Zeta de Riemann y dando una demostración del famoso Teorema de los Números Primos.

El análisis complejo presenta una enorme belleza y elegancia, que en parte se deben a la rigidez de algunos de sus resultados más importantes. Esperamos que al finalizar el curso, el estudiante haya podido apreciar algunas de las joyas que ofrece esta hermosa área de las matemáticas.

Horario: Martes 13:00 - 15:50, Viernes 13:00 - 14:50

Aula: 400 FM

Prerequisito: MA-0505 Análisis I.

Créditos: 5

Libro de texto: Elias Stein y Rami Shakarchi, *Complex Analysis*. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

Objetivo general:

Introducir a los estudiantes a algunos de los temas básicos del análisis complejo, buscando un balance entre la teoría y la práctica para que así los estudiantes puedan apreciar el análisis complejo como una teoría en sí misma y como una herramienta de suma utilidad en diversas áreas de la matemática.

Objetivos específicos:

Al finalizar este curso los estudiantes deben ser capaces de:

1. Conocer los conceptos básicos relacionados con funciones holomorfas para poder resolver problemas que involucren a estas funciones.
2. Aplicar los teoremas de Cauchy para poder evaluar distintos tipos de integrales.
3. Clasificar los distintos tipos de singularidades aisladas que puede tener una función compleja para poder estudiar los correspondientes residuos en cada singularidad.
4. Comprender la relación cercana entre la topología de ciertas regiones en el plano complejo con la teoría de funciones de variable compleja para poder aplicarla en diversos problemas.
5. Conocer algunos resultados básicos sobre las funciones Gamma y Zeta de Riemann para poder aplicarlos al estudio de problemas en la Teoría de Números.

Temario:

La siguiente es la lista de temas que esperamos cubrir durante el curso, siempre y cuando el tiempo lo permita. Esencialmente corresponde a los contenidos de los siete primeros capítulos del libro de texto.

I. Preliminares al análisis complejo:

- Números complejos y el plano complejo.
- Funciones en el plano complejo.
- Integración a lo largo de curvas.

II. El Teorema de Cauchy y sus aplicaciones:

- El Teorema de Goursat.
- Existencia local de primitivas y el Teorema de Cauchy en un disco.
- Evaluación de algunas integrales.
- Las fórmulas integrales de Cauchy.
- Más aplicaciones: el Teorema de Morera, sucesiones de funciones holomorfas, funciones holomorfas definidas en términos de integrales, el principio de reflexión de Schwarz, el Teorema de Aproximación de Runge.

III. Funciones meromorfas y el logaritmo:

- Ceros y polos.

- La fórmula de los residuos.
- Singularidades y funciones meromorfas.
- El principio del argumento y sus aplicaciones.
- Homotopías y dominios simplemente conexos: Una versión más general del Teorema de Cauchy.
- El logaritmo complejo.
- Series de Fourier y funciones armónicas.

IV. La transformada de Fourier:

- La clase \mathfrak{F} .
- La acción de la transformada de Fourier sobre la clase \mathfrak{F} : La fórmula de inversión de Fourier y la fórmula sumatoria de Poisson.

V. Funciones enteras:

- La fórmula de Jensen.
- Funciones de orden finito.
- Productos infinitos: Generalidades y el ejemplo de la fórmula productoria para la función $\text{sen}(z)$.
- Productos infinitos de Weierstrass.
- El Teorema de Factorización de Hadamard.

VI. Las funciones Gamma $\Gamma(s)$ y Zeta de Riemann $\zeta(s)$:

- La función Gamma $\Gamma(s)$: Continuación analítica y algunas propiedades básicas.
- La función Zeta de Riemann $\zeta(s)$: Su ecuación funcional y continuación analítica.

VII. La función Zeta y el Teorema de los Números Primos:

- La representación de $\zeta(s)$ como un producto infinito sobre los números primos.
- Los ceros de la función Zeta: ceros triviales y ceros no triviales.
- La derivada logarítmica $\zeta'(s)/\zeta(s)$. Estimación de $\zeta'(s)$ y de $1/\zeta(s)$.
- Reducción del Teorema de los Números Primos al estudio asintótico de las funciones auxiliares de Tchevichev $\psi(x)$ y $\psi_1(x)$.
- El comportamiento asintótico de $\psi_1(x)$ y la demostración del Teorema de los Números Primos.

Evaluación:

La evaluación del curso está dividida en los siguientes rubros:

Trabajo escrito	15 %
Examen parcial I	25 %
Examen parcial II	30 %
Examen parcial III	30 %

Los exámenes se realizarán fuera del horario de clase y las fechas de cada uno se anunciarán debidamente en clase.

El trabajo escrito consistirá en un reporte a manera de introducción de algún tema del análisis complejo o de otra área en la que se aplique el análisis complejo, que será acordado entre el estudiante y el profesor. Este deberá ser redactado en \LaTeX y se deberán entregar dos versiones preliminares a lo largo del semestre. Después de cada una de esas entregas preliminares, cada estudiante recibirá algunas recomendaciones que deberán ser incorporadas al documento previo a la entrega final. Las fechas de entrega de las versiones preliminares y de la entrega final serán acordadas en clase.

Referencias

- [Ahl78] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [Con78] John B. Conway, *Functions of one complex variable*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **11**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [GK06] Robert E. Greene y Steven G. Krantz, *Function theory of one complex variable*. Third edition. Graduate Studies in Mathematics, **40**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [How03] John M. Howie, *Complex analysis*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2003.
- [Lan99] Serge Lang, *Complex analysis*. Fourth edition. Graduate Texts in Mathematics, **103**. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Mui15] Jerry R. Muir Jr., *Complex analysis. A modern first course in function theory*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2015.
- [Pri03] H.A. Priestley, *Introduction to complex analysis*. Revised second edition. Oxford University Press, Oxford, 2003.