Las solución a cada uno de los ejercicios[1] **la puede consultar con alguno de los profesores del curso en el horario de consulta, el cual lo puede ver en** `emoodle.emate.ucr.ac.cr`.

1. Calcule el desarrollo limitado de las siguientes funciones del orden que se indica.

   (a) $f(x) = \sqrt[7]{1+x},\ n = 3.$

   (b) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}(x),\ n = 3.$

   (c) $f(x) = \cos(x) \cdot \ln(1-x),\ n = 5.$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{(1+x)^3}},\ n = 5.$

2. Sea $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   (a) Muestre que $g'(0) = 0$ y por tanto $g(x) = o(x)$.

   (b) Use el resultado anterior y el hecho de que $\tan(x) = x + o(x)$ para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\tan x} = 0$$

3. ⋆ Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$.

   (a) Halle una fórmula de Maclaurin con resto, de orden 4 asociada a la función $f(x)$.

   (b) Halle el desarrollo limitado, centrado en $x = 3$ y de orden 4 asociada a la función $f(x)$.

4. ⋆ Halle el desarrollo limitado de $f(x)$ en el orden indicado.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen}\big(e^x - 1\big)$ de orden 5.

   (b) $f(x) = \operatorname{sen}\big[\cos(2x^2) - 1\big]$ de orden 12.

5. Sea $f(x) = x^{-2}(e^{ax} - e^x - x)$. Encuentre los valores de a para que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a 0, exista.

6. A continuación se presentan funciones $y = f(x)$, definidas de forma implícita por una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$. Encuentre el desarrollo limitado de Maclaurin de orden n.

   (a) $x^2 + y^2 = 1, n = 4,\ y \geq 0.$ R/$1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$

   (b) $x + y^3 - y = 0, n = 3.$ R/$x + x^3 + o(x^3)$

   (c) $ye^y - x = 0, n = 3.$ R/$x - x^2 + \dfrac{3x^3}{2} + o(x^3)$

[1] Ejercicios recopilados por:
Prof. Jennifer Acuña
Prof. Ignacio Bustamante
Prof. Miguel Walker.

7. Pruebe que si f es dos veces continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = -1$, entonces para $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)^x = e^{\frac{-a^2}{2}}$$

8. Verifique el valor de los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right]^{1/x} = e^{\frac{-1}{2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{-1}{6}}$

(c) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\log x - 1} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x-\ln x)}{\ln x} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \right] x = \frac{-1}{2e}$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x = \sqrt{ab}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos^2 x) - x^2 e^x}{2x^2} = -1$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt{4+3x}}{\sqrt[7]{1-2x^2} - \sqrt[5]{1+4x}}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\arctan(x)} - 1 - x}{\ln(1-3x^2)}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+5\,x^2) - x\operatorname{sen}(x)}{\cos(6x) - 1}$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(x) \right]^x = e^{\frac{-2}{\pi}}$. Sugerencia: $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^x - e^a \right] \cot\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-a^2 e^a}{2}$

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right] = \frac{-1}{4}$