Universidad de Costa Rica | **Primer Ciclo 2018**
Escuela de Matemática | **Lunes 7 de Mayo del 2018**
MA-0702 Variable Compleja | **Ejercicios adicionales I-Parcial**

Instrucciones: La siguiente es una lista de ejercicios adicionales de práctica para el primer examen parcial.

1. Expanda $\dfrac{2z+3}{z+1}$ en potencias de $z-1$. ¿Cuál es el radio de convergencia? (Ahlfors p. 41)

2. Si $\sum a_n z^n$ tiene radio de convergencia R, ¿cuál es el radio de convergencia de $\sum a_n z^{2n}$ y de $\sum a_n^2 z^n$? (Ahlfors p. 41)

3. ¿Para cuáles valores de $z \in \mathbb{C}$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n$$

convergente? (Ahlfors p. 41)

4. Calcule las siguientes integrales (Ahlfors p. 123):
   (a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\, dz$ para $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} z^n (1-z)^m \, dz$ para $n, m \in \mathbb{Z}$.
   (c) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\rho} |z-a|^{-4}\, |dz|$ con $|a| \neq \rho$. Aquí, esta integral representa una integral con respecto a la longitud de arco, que son definidas en general como

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, |dz| := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt.$$

5. Demuestre que si f es una función entera que satisface la desigualdad $|f(z)| < |z|^n$ para algún n y para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z|$ suficientemente grande, entonces f debe ser un polinomio. (Ahlfors p. 123)

6. Demuestre que las derivadas sucesivas de una función analítica en un punto nunca pueden satisfacer $|f^{(n)}(z)| > n! n^n$. (Ahlfors p. 123)

7. Si $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ es un polinomio, como este tiene una antiderivada, sabemos que para toda curva cerrada $\gamma \subset \mathbb{C}$ se cumple que $\int_\gamma p(z)\, dz = 0$. Utilice esto para demostrar que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ se cumple que

$$\left| p(z) - \frac{1}{z} \right| \geq \varepsilon$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Esto muestra que la función $f(z) = 1/z$ no puede ser aproximada uniformemente por polinomios en el círculo unitario. (Priestley p. 127)

8. Sea $H(\mathbb{D})$ el conjunto de todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Suponga que $f, g \in H(\mathbb{D})$ se escriben como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$. El *producto de Hadamard* de f y g se define como la función

$$(f * g)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n z^n.$$

   (a) Demuestre que $f * g \in H(\mathbb{D})$.

   (b) Encuentre una función $I \in H(\mathbb{D})$ que sirva como identidad para el producto de Hadamard, es decir, tal que $I * f = f$ para toda $f \in H(\mathbb{D})$.

   (c) ¿Cuáles funciones $f \in H(\mathbb{D})$ no son invertibles bajo el producto de Hadamard? (Es decir, no existe $g \in H(\mathbb{D})$ tal que $f * g = I$)

   (d) Sea $0 < r < 1$. Verifique que $f * g$ se puede calcular con la integral de convolución

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} g\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta$$

   para todo $z \in D_r(0)$. (**Sugerencia:** Intente utilizando una serie y las fórmulas integrales para los coeficientes de Taylor) (Muir p. 100)

9. Para cada $n \in \mathbb{N}$ evalúe la integral (Muir p. 98)

$$\int_{\partial D_1(1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz.$$

10. Evalúe las siguientes integrales (Muir p. 98):

   (a) $\displaystyle\int_{\partial D_1(i)} \frac{z^2 + 2z}{z^2 - 2iz - 1}\, dz.$

   (b) $\displaystyle\int_{\partial D_{\pi/4}(0)} \frac{\tan z}{z^2}\, dz.$

11. Sea $f \in H(D_r(0))$ para algún $r > 0$. Defina $g : D_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) := \int_0^1 f(tz)\, dt.$$

   (a) Demuestre que $g \in H(D_r(0))$.

   (b) Demuestre que para todo $z \in D_r(0)$ se tiene que $\dfrac{d}{dz}[zg(z)] = f(z)$. (Muir p. 99)

12. Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función harmónica y real valuada en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Demuestre que $h(z) := \dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial u}{\partial x}$ es holomorfa en Ω. (Greene y Krantz p. 26)

13. Sea $f \in H(\Omega)$ para algún abierto Ω. Si $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, demuestre que $\log|f|$ es una función harmónica. (Greene y Krantz p. 26)