Las solución a cada uno de los ejercicios la puede consultar con alguno de los profesores del curso el horario lo puede ver en `emoodle.emate.ucr.ac.cr`.

1. Pruebe por inducción las siguientes identidades:

   (a) $1(5)+2(5)^2+\cdots+n(5)^n=\dfrac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

   (b) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

   (c) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

   (d) $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{2\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{2}x},\quad x\neq 0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\ldots$

   (e) $y^n-x^n=(y-x)\cdot(y^{n-1}+y^{n-2}x+y^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}),\quad x,y\in\mathbb{R}$.

   (f) $1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

   (g) $\cos(\alpha)\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(4\alpha)\ldots\cos(2^n\alpha)=\dfrac{\operatorname{sen}(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\operatorname{sen}(\alpha)}$

   (h) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$

   (i) $(1^5+2^5+\ldots+n^5)+(1^7+2^7+\ldots+n^7)=2(1+\ldots+n)^4$

   (j) $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{8}+\cdots+\arctan\dfrac{1}{2n^2}=\arctan\dfrac{n}{n+1}$

2. Muestre que se cumplen las siguientes proposiciones

   (a) $\displaystyle\sum_{r=n}^{2n-1}2r+1=3n^2$

   (b) $\displaystyle\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k\cdot(k+1)2^k}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

3. Demuestre usando el principio de inducción, que la $n-$ésima derivada es la que se indica.

   (a) $f(x)=(2x-3)^{-1}\Longrightarrow f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!2^n}{(2x-3)^{n+1}}$

   (b) $f(x)=xe^{2x}\Longrightarrow f^{(n)}(x)=2^{n-1}(n+2x)e^{2x}$

   (c) $f(x)=\operatorname{sen}x\Longrightarrow f^{(n)}(x)=\operatorname{sen}\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

   (d) $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}\Longrightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n+1-x)e^{-x}$

   (e) $f(x)=e^x\cdot\operatorname{sen}(x)\Longrightarrow f^{(n)}(x)=2^{n/2}\cdot e^x\cdot\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$

(f) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x) \Longrightarrow f^{(n)}(x) = \dfrac{3}{4}\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) - \dfrac{3^n}{4}\operatorname{sen}\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(g) $f(x) = a^{mx} \Longrightarrow f^{(n)}(x) = m^n a^{mx}(\ln a)^n$

4. Considere la función
$$f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$$
   (a) Haga fracciones parciales en la función anterior.
   (b) Obtenga una fórmula para la enésima derivada y demuestre su validez por inducción.

Respuesta: $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{3}(-1)^n \cdot n!\left[\dfrac{4}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$