Universidad de Costa Rica	Ejercicios Adicionales
Escuela de Matemática	Integrales Impropias
MA 1002 Cálculo 2	Recopilado por Prof. Marco Alfaro C.

1. Calcule las siguientes integrales impropias, o bien, determine su divergencia.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

(d) $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} \quad (a>1)$

(e) $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} \quad (a>1)$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-kx}\, dx \quad (k>0)$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\, dx$

(h) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$

(j) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{\left(x-1\right)^2}$

(k) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

(l) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(m) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx$

(n) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(ñ) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

Respuestas:
(a) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. (b) diverge. (c) $\frac{1}{\ln 2}$. (d) diverge. (e) $\frac{1}{\ln a}$. (f) $\frac{1}{k}$. (g) $\frac{\pi^2}{8}$. (h) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3$. (i) diverge. (j) diverge. (k) $\frac{2}{3}\ln 2$. (l) $\frac{\pi}{2}$. m) diverge. (n) 2. (ñ) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. Demuestre que las siguientes integrales son convergentes.

(a) $\displaystyle I=\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}dx$ (b) $\displaystyle I=\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ (c) $\displaystyle I=\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx$

3. Sea $\displaystyle I=\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(a) Demuestre que I es convergente.

(b) Haga un cambio de variable adecuado para calcular su valor de convergencia.

4. Demuestre que

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}}=6$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=2$

5. Determine el valor de la constante k para que

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2(kx)}=\frac{1}{1-\ln 2}$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{e^{kx}}=\frac{1}{4}$

6. Demuestre que la integral de Euler de primera especie, la función beta:

$$B\left(p,q\right)=\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x\right)^{q-1}\ dx$$

es convergente cuando $p>0$ y $q>0$.

7. Demuestre que la integral de Euler de segunda especie, la función gamma:

$$\Gamma\left(p\right)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\ dx$$

es convergente cuando $p>0$.

8. Determinar si son convergentes las integrales.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ dx}{\sqrt{x^5+1}}$ (e) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{dx}{\ln x}$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$ (d) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ (f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

Respuestas: (a) diverge. (b) converge. (c) converge. (d) converge. (e) diverge. (f) converge.

9. Muestre que

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\left(x+1\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+1\right)^2}=\frac{1}{2}.$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\left(x+1\right)^2}dx=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$

(c) $\displaystyle\int_b^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+a\right)\sqrt{x-b}}=\frac{\pi}{\sqrt{a+b}}\qquad\left(b>-a\right).$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\qquad\left(a^2>b^2\right).$

(e) $\displaystyle\int_0^{1}e^{-ax}\cos\left(bx\right)dx=\frac{a}{a^2+b^2}\qquad\left(a>0\right).$

10. Analice la convergencia de las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$

(b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\sqrt{x^2-x+1}}{1-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx \quad (n \geq 0)$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

Respuestas: (a) converge. (b) converge. (c) converge. (d) converge. (e) converge. (f) diverge. (g) converge. (h) converge si $m > -1$ & $n - m > 1$. (i) converge. (j) converge.

11. Determine el valor de α para el cual convergen las integrales siguientes. En los ejercicios (b), (c) y (e) calcule la integral.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{\alpha}{x+1}\right) dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,dt$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2\alpha} - \frac{\alpha}{x+1}\right) dx$

(f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x-1)^\alpha}\,dx$

Respuestas: (a) $\alpha > -1$. (b) $\alpha = \frac{1}{2}$. (c) $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (d) $0 < \alpha < 1$. (e) $\alpha = \frac{1}{2}$. (f) $\alpha > 1$.

12. Analice la convergencia de las siguientes integrales impropias mediante la definición.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{(x^2-9)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2-x}}$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

Respuestas: (a) converge. (b) converge. (c) converge. (d) converge. (e) converge. (f) converge. (g) converge. (h) converge. (i) diverge.