Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 1002 Cálculo 2

Ejercicios Adicionales #1
Práctica para el Primer Examen Parcial
Primer Semestre de 2018

1. Demuestre por inducción las siguientes proposiciones.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}.$

   (b) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$

   (c) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+2)=\frac{n\left(n^2+6n+11\right)}{3}.$

   (e) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right).$

   (f) $1+r+r^2+\cdots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$, si $r\neq 1$.

   (g) $2^n<n!$ para todo $n\geq 4$.

   (h) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ para todo $n\geq 2$.

   (i) $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots+na^{n-1}=\dfrac{na^n}{a-1}-\dfrac{a^n-1}{(a-1)^2}.$

2. Considere la función $f(x)=e^{-x^2}$.

   (a) Escriba el polinomio de Taylor de orden 6, $P_6(x)$ alrededor de $x=0$ de la función $f(x)$. Escriba además el resto de Lagrange correspondiente $R_6(x)$.

   (b) Utilice la parte (a) para calcular en forma aproximada el valor de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$. Dé una cota del error cometido.

3. Use el polinomio de Taylor de orden 2, $P_2(x)$, de la función $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ para aproximar $\cos 62^{\circ}$. Muestre que $|R_2(x)|<\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{90}\right)^3$.

4. Use una función adecuada para aproximar $\operatorname{sen} 47^{\circ}$ y $\operatorname{sen} 43^{\circ}$ con 3 decimales exactos, es decir, tal que $|R|<0.5\times 10^{-3}$.

5. Aproxime $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{1000}\right)$ por un polinomio de grado 9 y estime el error cometido.

6. ¿Qué error se comete al usar la fórmula aproximada $\operatorname{sen} x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$ cuando

   (a) $x=30^{\circ}$?

   (b) $x=60^{\circ}$?

7. ¿Qué error se comete al usar la fórmula aproximada $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ cuando

   (a) $x = 30^\circ$?

   (b) $x = 60^\circ$?

8. ¿Qué error se comete al usar la fórmula aproximada $e^{-x} \approx 1 - x$ cuando

   (a) $x = 0.1$?

   (b) $x = 0.5$?

9. ¿Cuántos términos de la serie de $\cos x$ deben tomarse para obtener $\cos 60^\circ$ con cinco cifras decimales exactas?

10. Exprese las siguientes funciones como un polinomio de Maclaurin más el resto de Lagrange.

    (a) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad n = 3$

    (b) $f(x) = \left(2x + x^2\right)^{\frac{5}{2}}, \quad n = 4$

    (c) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad n = 4$

    (d) $f(x) = \sqrt{1+x^4}, \quad n = 12$

    (e) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right), \quad n = 9$

    (f) $f(x) = \cos x, \quad n = 5$

11. Sea $f(x) = \cos^2 x$.

    (a) Calcule el desarrollo limitado de orden 2 de $f(x)$.

    (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\cos^2 x\right) - x^2 e^x}{2x^2}$.

12. Considere la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.

    (a) Calcule el valor de $\sqrt{1.001}$ con 3 decimales exactos.

    (b) Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{1+x^4}\, dx$ con un error menor que 0.001.

13. Utilice desarrollos limitados para calcular los siguientes límites.

    (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x \operatorname{sen}(ax) - b^x \operatorname{sen}(bx)}{c^x \operatorname{sen}(cx) - d^x \operatorname{sen}(dx)}$

    (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)^x - 1}{x^x - 1}$

    (c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$

    (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln^2\left(\cos^2 x\right) - \operatorname{sen} x}{x^3}$

    (e) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^3 \left[\tan\left(\frac{2}{x}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

    (f) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right) - \operatorname{sen}^2 x - \frac{x^4}{3}}{\operatorname{sen}\left(x^6\right)}$

14. Demuestre que

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right] = 0.$$

15. Sea $a_n = \dfrac{kn^2 - 1}{(k-1)\,n^2 + 1}$ una sucesión. Determine los valores de k para los cuales se cumple que

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = k.$$

Sugerencia: Considere los casos $k - 1 = 0$ y $k - 1 \neq 0$.

16. Considere la sucesión definida por:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(2x_n + 3\right), \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

Muestre que (x_n) es creciente y que está acotada superiormente por 2. Concluya que (x_n) converge y calcule el límite.

17. Muestre que la sucesión

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \cdots + \frac{1}{5^n+1}$$

es convergente. Sugerencia: Muestre que (x_n) es creciente y acotada superiormente por $\frac{1}{4}$.

18. Hallar los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

(b) $a_n = \dfrac{2n}{2n-1}$

(c) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

(d) $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n!}{n^2+1}$

(e) $a_n = \dfrac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{n^3}$

(f) $a_n = \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$ $(|a| < 1, |b| < 1)$

(g) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$

(h) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$

(i) $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

(j) $a_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

(k) $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$

(l) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(m) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \operatorname{sen} n!}{n+1}$

(n) $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n}$

(ñ) $a_n = \dfrac{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}$

(o) $a_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$

(p) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}$

19. Suponga que $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Muestre por inducción que
   $$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

   (b) Use la parte (a) para mostrar que
   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

20. Para $n \geq 2$,

   (a) Muestre que
   $$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

   (b) Use la parte (a) para hallar
   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right).$$

21. Aplique el Teorema de Convergencia Monótona de Weierstrass para demostrar la convergencia de las sucesiones siguientes. Calcule el límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$

   (b) $x_0 > 0, \quad x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right),\ n \geq 1.$

   (c) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{x_n}},\ \ n \geq 1.$

22. Analice la convergencia de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{n+1} = \lambda a_n$, $\lambda \in R$. Sugerencia: Ponga sucesivamente $n = 1, 2, \ldots$ para obtener la relación $a_n = \lambda^{n-1} a_1$ y considere casos sobre λ.

23. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}$, $k > 0$, $a_1 > 0$. Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada y que converge a la raíz positiva de la ecuación $x^2 - x - k = 0$. Sugerencia: Suponga que $a_2 \geq a_1$, muestre que $a_{n+1} \geq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $0 \leq a_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$.

24. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que
   $$a_{n+1} = \frac{3\,(1 + a_n)}{3 + a_n}, \quad a_1 = 3.$$
   Muestre que (a_n) converge a $\sqrt{3}$.