Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 1002 Cálculo 2

Ejercicios Adicionales
Práctica Miscelánea para el Segundo Examen Parcial
Recopilado por Prof. Marco Alfaro C.

1. Calcule la suma de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{7^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n+2^{3n-1}}{3^{4n}}$

2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a}-1\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n)^{-n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln n \cdot e^{-\sqrt{n}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+n^\alpha}{3^n+\ln n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a^n n^p$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n^\beta \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n\beta}{n}$

(ñ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[1-\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]$

(o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}+\cos n}$

Respuestas: (a) diverge, (b) converge sii $a=1$, (c) converge, (d) diverge, (e) converge, (f) diverge, (g) converge, (h) converge, (i) converge, (j) diverge, (k) converge sii $a<1$ o bien $a=1,\ p<-1$, (l) converge sii $\beta>0$ o bien $\beta=0,\ \alpha<0$,(m) converge sii $\beta<\frac{1}{2}$, (n) converge, (ñ) converge, (o) diverge, (p) diverge, (q) converge.

3. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\operatorname{sen}^2 x}$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x+1}\right)\,dx}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}$

(c) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\,(x-1)\,(x-2)}}$

(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}+(n-1)}{n}\right] dx\ \ (n>0)$

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-4\operatorname{sen}(2x)}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-\cos x}}$

(h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\operatorname{sen} x}-1}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[4]{x}-\operatorname{sen} x}$

(l) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$

(m) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$

(n) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}\,dx$

(ñ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^3+x^5}$

(o) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x-\operatorname{sen} x}$

(p) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{e^{\tan x}-1}\,dx$

(q) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$

(r) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1-x)^2}$

(s) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tan x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Respuestas: (a) diverge, (b) diverge, (c) converge, (d) diverge, (e) diverge, (f) converge absolutamente, (g) diverge, (h) converge, (i) converge, (j) converge, (k) converge, (l) converge, (m) diverge, (n) converge, (ñ) converge, (o) diverge, (p) converge, (q) diverge, (r) diverge, (s) converge.

4. Encuentre los vértices y los focos de la cónica y trace la gráfica. En el caso de una hipérbola, determine las asíntotas.

(a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

(b) $25x^2+9y^2=225.$

(c) $9y^2-x^2=9.$

(d) $2y^2-3x^2-4y+12x+8=0.$

5. Encuentre la ecuación de la cónica que satisfaga las condiciones dadas.

   (a) Elipse, centro en $C(2,2)$, un foco $F(0,2)$, vértice $V(5,2)$.
   (b) Hipérbola, focos $F(1,3)$ y $F(7,3)$, vértices $V(2,3)$ y $V(6,3)$.
   (c) Hipérbola, focos $F(2,2)$ y $F(6,2)$ asíntotas $y = x - 2$, $y = 6 - x$.

6. Encuentre la ecuación de la hipérbola con focos en los puntos $F(0,-1)$ y $F(6,-1)$ y con vértice en $V(1,-1)$. Dibuje la hipérbola y sus asíntotas.

7. Determine qué cónica representa la ecuación $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$. Indique los focos y los vértices.

8. Encuentre la ecuación de la parábola con foco en $F(-3,2)$ y con directriz $x = 0$. Dibuje su gráfica.

9. Determine qué cónica representa la ecuación $2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y - 16 = 0$. Indique los focos y los vértices.

10. Dada la ecuación $3x^2 - 4y^2 - 6x - 9 = 0$

    (a) Identifique la curva que representa en el plano xy.
    (b) Escriba los focos, vértices y asíntotas, si existen.
    (c) Trace su gráfica.

11. Considere la ecuación $y^2 - 2y - 4x^2 - 8x - 7 = 0$.

    (a) Muestre que la ecuación representa una hipérbola y calcule su centro.
    (b) Calcule los focos.
    (c) Calcule los vértices.
    (d) Calcule las asíntotas.
    (e) Haga el gráfico de la curva con sus asíntotas.

12. Calcule la ecuación de la parábola con foco en $F(0,0)$ y con directriz $y = 1$.

13. Hallar las intersecciones y graficar las siguientes curvas.

    (a) $x^2 + 4y^2 = 36$ & $x^2 + y^2 = 12$.
    (b) $x^2 - y^2 = 4$ & $y^2 - 3x = 0$.
    (c) $x^2 - y^2 + 2x + 4y = 0$ & $x^2 - y^2 = 1 - 2x$.
    (d) $x^2 + y^2 = 4$ & $y^2 + 3x = -6$.

14. Identificar el área de la región encerrada por las siguientes curvas.

    (a) $y^2 - 8x^2 = 5$, $y - 2x^2 = 0$.
    (b) $3x^2 - 7y^2 = 5$, $9y^2 - 2x^2 = 1$.
    (c) $x^2 + y^2 = 7$, $x^2 - y^2 = 1$. La región que contiene al origen.

15. Determinar una representación paramétrica para las siguientes curvas:

(a) $4x - y^2 = 5$.

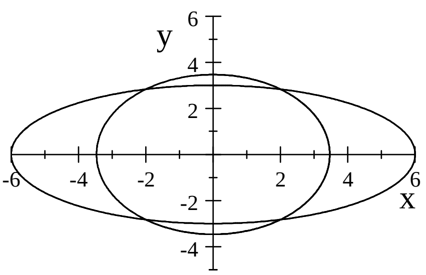
(b) $(x+9)^2 + (y-4)^2 = 49$.

(c) $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{9}\right)^2 = 1$.

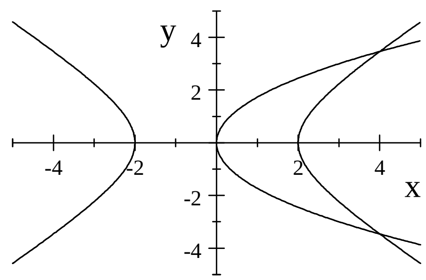
(d) $y = (x-2)^2 + 3$.

Respuestas

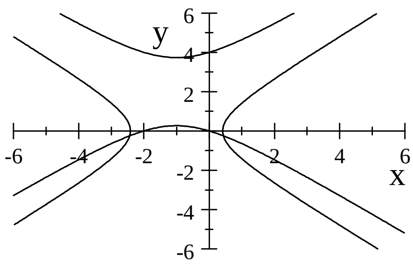
4. (a) $F\left(\pm 2\sqrt{3}, 0\right)$, $V(\pm 4, 0)$, $V(0, \pm 2)$, (b) $F(0, \pm 4)$, $V(\pm 3, 0)$, $V(0, \pm 5)$, (c) $F\left(0, \pm\sqrt{10}\right)$, $V(0, \pm 1)$, $y = \pm\frac{1}{3}x$, (d) $F\left(2 \pm \sqrt{15}, 1\right)$, $V\left(2 \pm \sqrt{6}, 1\right)$, $y - 1 = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}(x-2)$.
5. (a) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$, (b) $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$, (c) $\frac{(x-4)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$.
6. $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1$, $y + 1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-3)$.
7. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$, $F\left(1 \pm \sqrt{3}, -1\right)$, $V(1 \pm 2, -1)$.
8. $(y-2)^2 = -6\left(x + \frac{3}{2}\right)$.
9. $\frac{(x+1)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$, $F\left(-1 \pm \sqrt{5}, 2\right)$, $V\left(-1 \pm \sqrt{3}, 2\right)$, $y - 2 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)$.
10. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, $F\left(1 \pm \sqrt{7}, 0\right)$, $V(1 \pm 2, 0)$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1)$.
11. (a) $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1$, $C(-1, 1)$, (b) $F\left(-1, 1 \pm \sqrt{5}\right)$, (c) $V(-1, 1 \pm 2)$, (d) $y - 1 = \pm 2(x+1)$.
12. $x^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\right)$.
13.



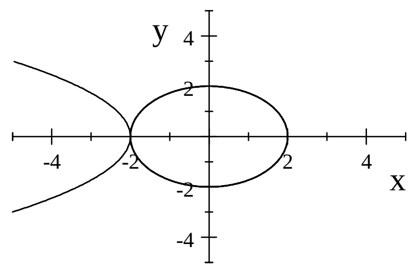
(a)



(b)

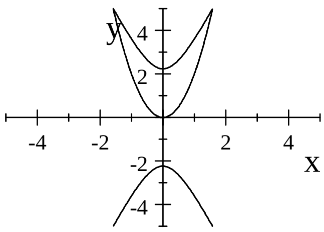


(c)

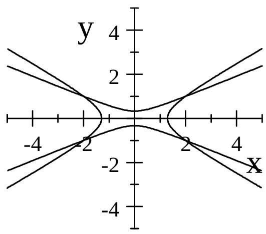


(d)

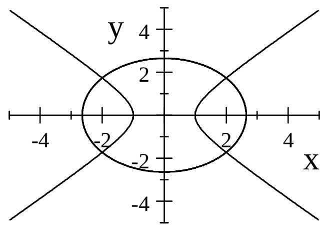
14.



Problema 14 (a)



Problema 14 (b)



Problema 14 (c)

15. (a) $r(t) = \left(\dfrac{t^2+5}{4}, t\right)$, (b) $r(t) = (7\cos t - 9, 4 + 7\operatorname{sen} t)$, (c) $r(t) = (4\cos t, 9\operatorname{sen} t)$, (d) $r(t) = \left(t+2, t^2+3\right)$.

Bibliografía:
1. Introducción al Análisis de Una Variable, Eduardo Piza V.
2. Problemas sobre Cálculo de Una Variable, I. A. Maron.
3. Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, B.P. Demidovich.
4. Calculus, Tom M. Apóstol.