1. Calcule la suma de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 2^{3n-1}}{3^{4n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{3}{\pi}\right)^{n-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{6^{n+1}}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{6}{5^{n+1}}\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$

2. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{(1+n)^{n+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^{\alpha}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=9}^{+\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a^{\ln n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p - n^q}$ $(p > q > 0)$

3. Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]^p$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^p\left[\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^n-b^n}\ (a>b>0)$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)$

4. Determine si las siguientes series divergen, convergen condicionalmente o absolutamente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+4^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^{2n+1}}{(-n)^n}$

5. Determine para qué valores de k convergen las series

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n^{k+2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}\right)^k$

6. Sea $\alpha>0$. Utilice el criterio Raabe para mostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$ converge para todo $\alpha>2$.

7. Determine el número de términos que hay que sumar para aproximar la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^7}$ con un error menor que 0.0005.

8. Considere la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)!}$

(a) Demuestre que la serie converge.

(b) Encuentre el número de términos que se necesitan para aproximar su valor mediante una suma parcial, de forma que el error sea menor que 0.0001.

9. Muestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-n}+\frac{1}{2+3n+n^2}\right)$ converge y calcule su suma.

10. Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

    (a) Explique si la serie converge en forma absoluta o condicional.

    (b) Determine el número de términos necesarios para calcular la suma de la serie con un error menor que 0.05.

11. Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}{7\cdot 10\cdot 13\cdots(3n+4)}$ converge o diverge.

12. Demuestre que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)\right]}{\ln n^n\ln(n+1)^{n+1}}=\log_2\sqrt{e}.$$

13. Demuestre las siguientes identidades

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\frac{3}{2}.$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{3}{4}.$

14. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!\cdot n^q}$$

converge si y sólo si $q>p$.

15. Analice la convergencia de las siguientes series.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{n-\ln n}{n^2+10n^3}}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}\quad(|a_n|<10)$

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

    (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(3n+2)\,n^{\frac{4}{3}}}$

    (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3+\operatorname{sen} n}{n(1+e^{-n})}$

    (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

    (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)$

16. Analice la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series numéricas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n \ln n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2+2n+2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n} n^3}{(n^2+1)^{\frac{4}{3}}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n-1}$

17. Si a, b y d son números positivos, con $b > a$, muestre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)}$ converge si y sólo si $b-a > d$.

18. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right]^{\alpha} \qquad (p > 0, q > 0)$$

converge si y sólo si $\alpha(q-p) > 1$.

19. Determine cuántos términos de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ deben tomarse para obtener su suma con una exactitud hasta 10^{-3}.

20. Hallar una cota superior para R_5 en la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n \cdot 2^n}$.

Respuestas o sugerencias

1. (a) $\frac{255}{5986}$, (b) $\frac{7}{36}$, (c) $\frac{3}{4}$, (d) $\frac{3}{4}$, (e) $\frac{\pi}{3-\pi}$, (f) $\frac{15}{7}$, (g) 1, (h) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. (a) converge, (b) converge, (c) converge, (d) diverge, (e) converge, (f) diverge, (g) converge sii $\alpha > 2$, (h) converge, (i) converge sii $0 < a < e^{-1}$, (j) converge, (k) converge, (l) converge sii $p > 1$.
3. (a) converge sii $p > 2$, (b) diverge, (c) converge sii $p < \frac{1}{2}$, (d) converge, (e) converge (Sug: $\frac{1}{a_n} \to +\infty$), (f) converge, (g) converge, (h) converge si $a > 1$, (i) converge, (j) converge.
4. (a) converge absolutamente, (b) converge absolutamente.
5. (a) $k > 2$, (b) $k > \frac{1}{2}$.
7. $n \geq 2$.
8. (b) $n \geq 3$.
9. $\frac{(e^{-1}+1)}{2(1-e^{-1})}$.
10.(a) converge condicionalmente, (b) $n \geq 6$.
11. diverge.
15. (a) diverge, (b) diverge, (c) converge, (d) diverge, (e) converge, (f) diverge, (g) converge, (h) diverge.
16. (a) converge absolutamente, (b) converge condicionalmente, (c) converge absolutamente, (d) diverge, (e) diverge , (f) converge absolutamente, (g) converge condicionalmente, (h) converge absolutamente.
19. $n \geq 1000$.
20. $|R_5| \leq \dfrac{7}{6 \cdot 2^5}$.