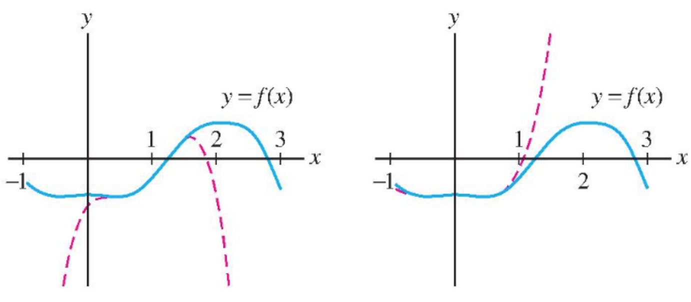
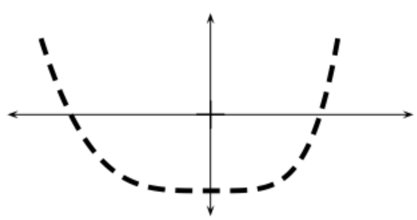
Las solución a cada uno de los ejercicios la puede consultar con alguno de los profesores del curso el horario lo puede ver en `emoodle.emate.ucr.ac.cr`.

1. El gráfico discontinuo en la figura corresponde al polinomio de Taylor de una función $f(x)$. ¿Cuál de los dos corresponde al polinomio de Maclaurin?



(A) (B)

2. Explique por qué el gráfico que se muestra en la imagen no representa el resto $R_n(x)$ para ningún polinomio de Taylor centrado en 0.



3. Determine si las siguientes funciones poseen extremo relativo en $x = 0$.

   (a) $f(x) = x^3 + 2$

   (b) $g(x) = \operatorname{sen}(x) - x$

   (c) $h(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{6}x^3$

   (d) $k(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$

4. La función f posee derivadas de todos los órdenes para todos los números reales x. Asuma que $f(2) = -3,\ f'(2) = 5,\ f''(2) = 3,\ f'''(2) = -8$.

   (a) Escriba el polinomio de Taylor, de grado 3, para f alrededor de $x = 2$ y úselo para aproximar el valor de $f(1)$.

   (b) La cuarta derivada de f satisface la desigualdad $|f^{(4)}(x)| \leq 3$ para todo $x \in [1, 2]$. Encuentre una cota del error de aproximación.

5. Sea f una función que posee derivadas de todos los órdenes para $x \in \mathbb{R}$. El polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $x = 2$ es dado por

$$T_3(x) = 7 - 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3$$

Recopilados por
Prof. Jennifer Acuña
Prof. Ignacio Bustamante.

(a) Encuentre el valor de $f(2)$ y $f'(2)$.

(b) ¿Hay suficiente información para determinar si f posee un punto crítico en $x = 2$? Si no hay, explique por qué no. Caso contrario, determine si $f(2)$ es un mínimo relativo, un máximo relativo o ninguno. Justifique su respuesta.

(c) Use el $T_3(x)$ para encontrar una aproximación de $f(0)$. ¿Hay suficiente información para determinar si f posee un punto crítico en $x = 0$? Si no hay, explique por qué no. Caso contrario, determine si $f(0)$ es un mínimo relativo, un máximo relativo o ninguno. Justifique su respuesta.

(d) La cuarta derivada de f satisface la desigualdad

$$|f^{(4)}(x)| \leq 6, \qquad \forall x \in [0, 2]$$

Encuentre una cota del error de aproximación para $f(0)$. Explique por qué $f(0)$ debe ser negativo.

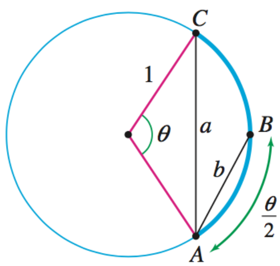
6. Considere la función $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(a) Calcule lo polinomios de orden 3 y 4 centrados en $x = \frac{\pi}{3}$ y sus respectivos restos de Lagrange.

(b) Muestre que $T_3(x) - T_4(x) = 0$.

(c) Aproxime sen $(2°)$ usando ambos polinomios y determine una cota para el error que se comete en cada caso. ¿Cuál de ellas da mayor información sobre el exactitud que la aproximación? Recuerde que $2° = \frac{\pi}{90}$

7. Considere la imagen del círculo unitario. Para estimar la longitud del arco circular θ se utiliza la fórmula $\theta \approx \dfrac{8b - a}{3}$, con a y b como en la figura.



(a) Verifique que $a = 2\,\text{sen}\,(\theta/2)$.

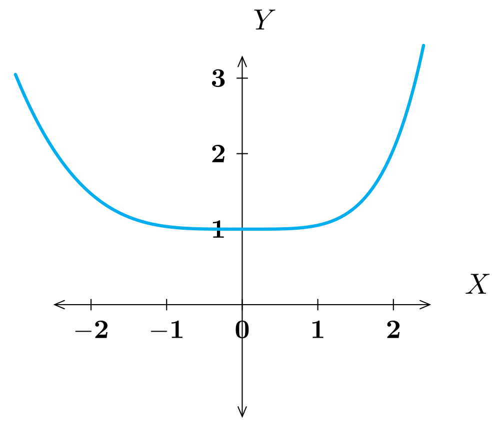
(b) Asumiendo que $b = 2\,\text{sen}\,(\theta/4)$, muestre que

$$\theta \approx \frac{16}{3}\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{4}\right) - \frac{2}{3}\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(c) Calcule el polinomio de Maclaurin, $T_5(x)$, en la expresión de la derecha en el paso anterior.

(d) Muestre que el error en la aproximación de θ es menor que $0.000022|\theta|^6$.

8. Considere la función $f(x) = e^x - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$, cuya gráfica se muestra



Utilice el polinomio de Maclaurin, de grado 4, para clasificar el punto $x = 0$.

9. Considere la función $f(x) = x^3 \arctan(x)$.
Utilizando algún polinomio de Maclaurin, clasifique el punto $x = 0$.

10. Considere la función $f(x) = \cos(x + \dfrac{\pi}{3})$.

(a) Muestre que $\cos(x + \dfrac{\pi}{3}) \approx \dfrac{1}{4}(2 - 2\sqrt{3}x - x^2)$ es el polinomio de Maclaurin.

(b) Calcule la forma aproximada del valor de $\cos(58°)$.

(c) Muestre que el error cometido en la parte b) es menor que $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{\pi}{90}\right)^3$.

11. Utilizando el polinomio de Maclaurin de grado 5 generado por la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, aproxime el valor de $\sqrt[3]{28}$. Determine una cota par el error de la aproximación.
Sugerencia: Recuerde que $\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{1+27} = 3\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{27}}$

12. Considere la función $f(x) = \arctan(x)$

(a) Calcule el polinomio de Maclaurin generado por $f(x)$ de grado 3.

(b) Utilice $T_3(x)$ para obtener a $r = (\sqrt{21} - 3)/2$ como aproximación de la raíz no nula de la ecuación $x^2 = \arctan(x)$.

(c) Dado que $\sqrt{21} < 4.6$ y que $2^{16} = 65536$, pruebe que la aproximación anterior satisface la desigualdad

$$|r^2 - \arctan r| < \frac{7}{100}$$

13. Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^3}$.

Polinomios de Taylor

(a) Calcule el polinomio de Maclaurin grado 6 generado por la función $f(x)$.

(b) Utilice el polinomio de la parte (a) para aproximar $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f\,(x)\,dx$.

(c) Determine una cota para el error de la aproximación de la integral.

14. Utilice la igualdad $\operatorname{sen}\,(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + R_4\,(x)$ para calcular lo que se le pide.

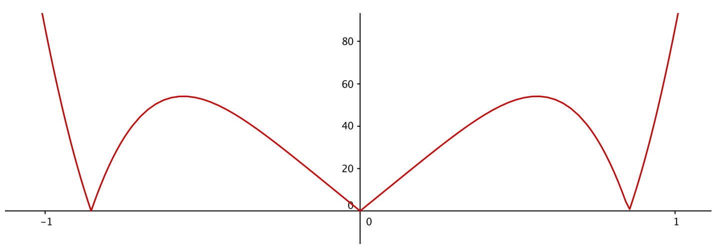
(a) ¿Por qué se puede utilizar $R_4\,(x)$ en lugar de $R_3\,(x)$?

(b) Muestre que usando la aproximación anterior $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen}\,\left(x^2\right)dx \approx \frac{55\sqrt{2}}{672}$.

(c) Muestre que el error de aproximar la integral cumple que $\mid r(x) \mid \leq \dfrac{\sqrt{2}}{84480}$

15. Aproxime el valor de la intregral $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln\,(x)}{x-1}\,dx$ utilizando un polinomio de Taylor de la función $f\,(x) = \ln\,(x)$ centrado en $x = 1$ de grado 5. Muestre que el error de calcular la integral es $\mid R \mid \leq \dfrac{1}{2304}$ ¿Cuántos decimales exactos garantiza la cota del error? Justifique su respuesta.

16. Sea $f(x) = \operatorname{sen}\,(x^2) + \cos(x)$. El gráfico de $y = |f^{(5)}(x)|$ se muestra en la siguiente imagen



(a) Escriba los primeros cuatro términos no nulos del polinomio de Maclaurin de $\operatorname{sen}\,(x^2)$, de $\cos(x)$ y finalmente de $f(x)$.

(b) Encuentre el valor de $f^{(6)}(0)$.

(c) Sea $T_4(x)$ el polinomio de Maclaurin de grado 4 para f. Usando la información del gráfico de $y = |f^{(5)}(x)|$ muestre que

$$\left|T_4\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{1}{3000}$$

Recopilados por
Prof. Jennifer Acuña
Prof. Ignacio Bustamante.