MA-1002 Resumen de criterios de convergencia de series

Prof. Adrián Barquero Sánchez

Series geométricas

$$\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \begin{cases} \dfrac{r^k}{1-r} & \text{si } -1 < r < 1, \\ \text{diverge} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Series telescópicas

Sobrevive siempre el término de menor índice (con su respectivo signo) y la suma o resta del límite del término general b_{n+1}. La serie es convergente sí y solo sí el límite existe. Por ejemplo:

$$\sum_{n=k}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_k - \lim_{n\to\infty} b_{n+1},$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}(b_n - b_{n-1}) = -b_{k-1} + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Criterio de la condición necesaria

Si a_n es una sucesión tal que

1. $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, o
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$,

entonces la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ es divergente.

Nota: Este criterio solo sirve para probar que una serie es divergente, ¡nunca para ver que es convergente!

Criterio de la integral

Para una función $f : [k,\infty[\to \mathbb{R}$ continua, positiva y decreciente, si $a_n = f(n)$ para todo $n \geq k$, la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ y la integral impropia $\int_k^{\infty} f(x)\,dx$ son ambas convergentes o ambas divergentes. Además, si estas convergen, se tiene la cota

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_N \leq \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

para el error cometido al aproximar la serie por medio de la N-ésima suma parcial S_N.

Criterio de la integral (aproximación)

Si se dan las condiciones para la convergencia en el criterio de la integral, la suma de la serie $S = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ se puede aproximar por la N-ésima suma parcial $S_N = \sum_{n=k}^{N} a_n$ y esta aproximación satisface que

$$\sum_{n=k}^{N} a_n + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq \sum_{n=k}^{N} a_n + \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

p-Series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } p > 1, \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Criterio de comparación directa

Si (a_n) y (b_n) son sucesiones de términos positivos tales que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$, entonces:

1. Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.
2. Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ también diverge.

Criterio de comparación al límite

Si (a_n) y (b_n) son sucesiones de términos positivos, entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ satisfacen lo siguiente:

1. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L \neq 0$, las dos series tienen el mismo comportamiento.
2. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ (b_n domina a a_n), entonces si $\sum b_n$ converge, también $\sum a_n$ converge.
3. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ (a_n domina a b_n), entonces si $\sum b_n$ diverge, también $\sum a_n$ diverge.

Series alternantes

Sea (a_n) una sucesión de términos positivos. Si se cumplen las condiciones

1. a_n es decreciente,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

entonces la serie alternante $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.

Series alternantes (aproximación)

Si se cumplen las condiciones del criterio para series alternantes, entonces la suma $S = \sum(-1)^n a_n$ de la serie se puede aproximar por la N-ésima suma parcial S_N y el error satisface la cota

$$|R_N| \leq a_{N+1}.$$

Convergencia absoluta y condicional

- Decimos que una serie $\sum a_n$ **converge absolutamente** si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.
- Decimos que una serie $\sum a_n$ **converge condicionalmente** si la serie converge pero la serie $\sum |a_n|$ diverge.

Criterio de la convergencia absoluta

Si la serie $\sum |a_n|$ es convergente, entonces la serie $\sum a_n$ también es convergente.

Criterio de la razón de D'Lambert

Sea (a_n) una sucesión tal que existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $a_n \neq 0$ para $n \geq N$. Sea $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. Entonces:

1. Si $0 \leq L < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. Si $L > 1$ o $L = \infty$, la serie $\sum a_n$ es divergente.

Nota: Si $L = 1$, el criterio no nos permite concluir nada.

Criterio de la raíz n-ésima de Cauchy

Sea (a_n) una sucesión y sea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Entonces:

1. Si $0 \leq L < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. Si $L > 1$ o $L = \infty$, la serie $\sum a_n$ es divergente.

Nota: Si $L = 1$, el criterio no nos permite concluir nada.

Criterio de Raabe

Sea (a_n) una sucesión de términos positivos. Sea $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$. Entonces:

1. Si $L > 1$ o $L = \infty$, la serie $\sum a_n$ converge.
2. Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.

Nota: Si $L = 1$, el criterio no nos permite concluir nada.

Fórmula de Stirling

El factorial satisface la fórmula asintótica

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (n \to \infty),$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$

Límites útiles

Los siguientes son algunos límites que pueden ser de utilidad.

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para $a > 0$ constante.
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Series y desarrollos limitados

Para analizar la convergencia de algunas series puede ser necesario utilizar desarrollos limitados. Por ejemplo, para analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right),$$

se puede hacer un desarrollo limitado para $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ de la siguiente manera. Usando el hecho de que $\operatorname{sen} x = x + x o(1)$ cuando $x \to 0$, tenemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} o(1) \quad (n \to \infty).$$

Esto implica que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

y entonces por el criterio de comparación al límite, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ tiene el mismo comportamiento que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la cual es divergente.

De manera similar, para analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ se puede utilizar el desarrollo limitado de orden 2 para $\cos x$, dado por $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 o(1)$ $(x \to 0)$, para obtener el desarrollo limitado

$$\begin{aligned} 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} o(1)\right) \quad (n \to \infty) \\ &= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} o(1) \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

Esto nos dice que $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ y de nuevo, el criterio de comparación al límite implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ se comporta igual que la p-serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual es convergente.