Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA 1002 Cálculo 2

Ejercicios Adicionales para el Tercer Parcial
Series de Potencias
Prof. Marco Alfaro C.[1]

1. Utilizando los siguientes desarrollos en serie de potencias:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

demuestre las identidades siguientes.

(a) $\dfrac{1}{2-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \quad (|x| < 2)$

(b) $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$

(c) $\operatorname{sen}^2 x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$

(Sugerencia: Use la identidad $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$)

(d) $\dfrac{x}{1+x-2x^2} = \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - (-2)^n\right] x^n \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right)$

(Sugerencia: Note que $\dfrac{3x}{1+x-2x^2} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+2x}$)

(e) $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n \quad (|x| < 1)$

(f) $\ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$

2. Hallar la suma de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

[1] Basado en parte en Apóstol, Calculus & Demidovich, Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.

3. Demuestre las siguientes identidades para $|x| < 1$.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n = -\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \dfrac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4x^n = \dfrac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\,x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2!}x^n = \dfrac{1}{(1-x)^3}$

(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n = \dfrac{1}{(1-x)^4}$

4. Determine el radio y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias. Analice la convergencia en los extremos si $0 < R < +\infty$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$

5. Sea $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$.

(a) Exprese $f(x)$ como una serie de Taylor centrada en $x = 2$.

(b) Determine el intervalo de convergencia de dicha serie.

6. Defina $\phi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n^2+4)}$ para $0 < x < 1$. Muestre que para $0 < x < 1$ se cumple que $x\phi'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+4}$.

7. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule en forma explícita la suma de $f(x)$.

8. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$

   (a) Determine el radio y el intervalo de convergencia, incluyendo el comportamiento en los extremos.
   (b) Calcule $f(x)$ en forma explícita.
   (c) Calcule la suma de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$.

9. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{(n-1)(n+1)}$.

   (a) Determine el radio y el intervalo de convergencia, incluyendo el comportamiento en los extremos.
   (b) Calcule $f(x)$ en forma explícita.
   (c) Use la parte (b) para calcular $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)(n+1)}$.

10. Se define $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$.

    (a) Determine el intervalo de convergencia de la serie.
    (b) Calcule $f(x)$ en forma explícita.

11. Demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right) x^n = \frac{2x}{(1-x)(1-x^2)}$ para $|x| < 1$.

12. Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

    (a) Calcule la serie de Maclaurin generada por f.
    (b) Use la parte (b) para calcular el desarrollo en serie de potencias de la función $\arctan x$.

13. Considere $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

    (a) Determine una representación en serie de potencias de $f(x)$.
    (b) Demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$. Sugerencia: Derive término a término la serie en (a).

14. Considere $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

    (a) Determine una representación en serie de potencias de $f(x)$.
    (b) Determine la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

15. Sea $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{3^n}$, calcule $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ correcto en cuatro cifras decimales.

16. Considere $f(x)=x^2e^{-x}$.

    (a) Determine una representación en serie de potencias de $f(x)$.

    (b) Demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^{n+1}\dfrac{n+2}{n!}=4$. Sugerencia: Derive término a término la serie en (a).

17. Considere $f(x)=xe^x$.

    (a) Determine una representación en serie de potencias de $f(x)$.

    (b) Demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n!\,(n+2)}=\dfrac{1}{2}$. Sugerencia: Integre término a término de 0 a 1 la serie obtenida en la parte (a).

18. Demuestre que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)\,n}=x+(1-x)\ln(1-x)$$

integrando término a término de 0 a x la serie de potencias de $\ln(1-x)$.

19. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\arctan x-x\right]$$

integrando término a término de 0 a x la serie de potencias de $t\arctan t$.

20. Use el polinomio de Maclaurin de segundo grado de $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ para calcular $\sqrt[3]{25}$ y acote el error absoluto de esta aproximación.

21. Use la serie de Maclaurin de e^x para hallar la serie de Taylor de e^x en $x=a$. Sugerencia: Note que

$$e^x=e^ae^{x-a}.$$

22. Use la serie de Maclaurin de $\ln(1+x)$ para hallar la serie de Taylor de $\ln x$ en $x=a \quad (a>0)$. Sugerencia: Note que

$$\ln x=\ln[a+(x-a)]=\ln a+\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right).$$

23. Considere la identidad

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

(a) Use la identidad anterior para mostrar que

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1 + x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1 + x}.$$

(b) Use la igualdad de (b) para mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x} dx$$

(c) Justifique que $R_n(x) = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x} dx \longrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$ y concluya que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

(d) ¿Cómo puede demostrarse este resultado usando el Teorema de Abel para puntos extremos?

24. Considere las funciones

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!n!2^{2n}}, \qquad J_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(n+1)!2^{2n+1}}$$

llamadas *funciones de Bessel de primera especie*, de orden cero y uno, respectivamente.

(a) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

(b) Demuestre que $y = J_0(x)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

(c) Demuestre que $y = J_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - 1\right) y = 0.$$

Respuestas:

2. (a) $f(x) = -\dfrac{1}{x-3}$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{4x}\ln(1+2x)$, (c) $f(x) = \dfrac{2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$,
(d) $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ln(1+x)$.

4. (a) $I = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, (b) $I = \left]-4, 4\right[$, (c) $I = \left]\frac{-5}{4}, \frac{13}{4}\right[$, (d) $I = \left]2, 4\right[$, (e) $I = \left]1 - \dfrac{1}{e}, 1 + \dfrac{1}{e}\right[$,
(f) $I = \left]-2, 0\right[$.

5. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (x-2)^n$, (b) $I = \left]1, 3\right[$,