Las solución a cada uno de los ejercicios la puede consultar con algún(a) profesor(a) del curso. El horario de consulta lo puede ver en `emoodle.emate.ucr.ac.cr`[1].

Primera parte.

1. Muestre por inducción que $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\,(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ y usela para calcular el límite de la sucesión $a_n=\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{2}+\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{6}+\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{12}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n\,(n+1)}\right)^n$

2. Mostrar que las siguientes sucesiones son monótonas.

   (a) $a_n=\dfrac{3n+10}{2n+7}$. Creciente

   (b) $b_n=\dfrac{-5}{\sqrt{2n-1}}$. Creciente

   (c) $a_n=\dfrac{2n+3}{5n+1}$. Decreciente

   (d) $b_n=\dfrac{2^n}{n!}$, $\quad n>1$. Decreciente

3. Calcule los siguientes límites

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{(8-3n)(5+7n)}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n-7\cdot 2^n}{7\cdot 3^n+5\cdot 2^n}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{3n}$

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n^3+7n}$

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(3n)!+n^2}$

   (j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n^2}$

   (k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

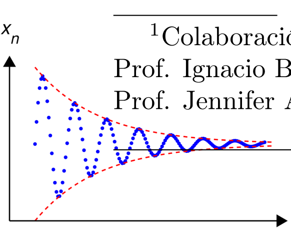
4. Analice la convergencia de las siguientes sucesiones

   (a) $a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

   (b) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n+2}}$

   (c) $a_n=\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

[1] Colaboración:
Prof. Ignacio Bustamante
Prof. Jennifer Acuña



(d) $a_n = \dfrac{n \sin n!}{n^2+1}$

(e) $a_n = \dfrac{n^2}{3n+4} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(f) $x_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{5n}$

(g) $x_n = \dfrac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)}$

(h) $x_n = n - \sqrt{n^2+1}$

(i) $x_n = \left(\dfrac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}}$

(j) $x_n = \ln(n) - \ln(n-1)$

(k) $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^n \dfrac{dx}{x}$

(l) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$

5. Hallar los límites de las siguientes sucesiones

   (a) $a_n = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$

   (b) $a_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$

6. (a) Muestre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^{200}+n^{100}+1} - n^{100} = 1/2$.

   (b) Use el resultado anterior para mostrar que,

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}^2\left(\pi\sqrt{n^{200}+n^{100}+1}\right) = 1$$

7. Considere la secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$a_n = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{2\cdot 2^2}\cdots + \arctan\frac{1}{2n^2}$$

   Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

Segunda parte.

1. Sea $y_1 = 1, y_{n+1} = \sqrt{2+y_n}$. Demostrar que la sucesión es creciente y acotada superiormente por 4, concluir que y_n converge y además determinar dicho límite.

2. Sea $s_1 = \sqrt{2}, s_{n+1} = \sqrt{2s_n}, \forall\, n \geq 1$. Probar que

   (a) $s_n \leq 2$

   (b) $s_n \leq s_{n+1}$

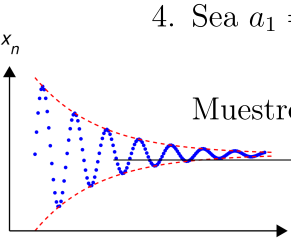
   (c) $s_n \longrightarrow 2$

3. Analice la convergencia de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{n+1} = \lambda a_n, \lambda \in \mathbb{R}$. Sugerencia: ponga sucesivamente $n = 1, 2, \ldots$ para obtener la relación $a_n = \lambda^{n-1}a_1$ y considere casos sobre λ.

4. Sea $a_1 = a_2 = 5$ y

$$a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}, \qquad n \geq 2$$

   Muestre por inducción que $a_n = 3^n - (-2)^n$ si $n \geq 1$. Encuentre el límite de (a_n).



5. Para $c > 2$, defina la secuencia recursiva como

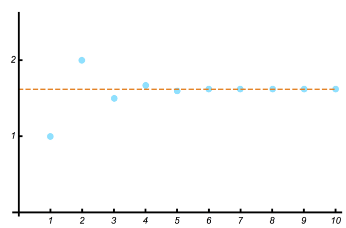
$$a_1 = c^2, \qquad a_{n+1} = (a_n - c)^2, \qquad n \geq 1$$

Muestre que la secuencia es estrictamente creciente. ¿Cuál es el valor de convergencia de la secuencia (a_n)?

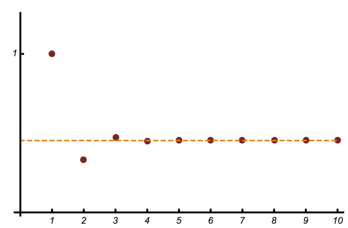
6. Sea $x_1 = 97$ y para $n > 1$, sea $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$. Calcule

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_8.$$

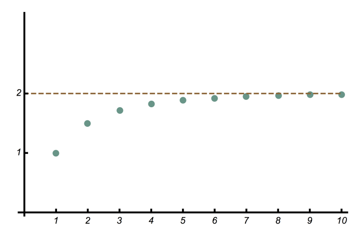
7. A continuación se muestran tres secuencias distintas de modo que el primer término x_1 vale 1, en los tres casos. Muestre que son contractivas.



a) $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 1$



b) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n^2}$, $n \geq 1$



c) $x_{n+1} = \dfrac{1}{6}\left(x_n^2 + 8\right)$, $n \geq 1$

8. (a) Muestre por inducción que: $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, $\quad n \geq 1$.

(b) Sea $-1 < r < 1$, con $r \neq 0$. Defina la secuencia

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

Muestre que la secuencia s_n es contractiva, haciendo $\left|\dfrac{s_{n+1} - s_n}{s_n - s_{n-1}}\right|$, luego calcule el límite.

9. Muestre que las siguientes secuencia son contractivas y encuentre su límite.

(a) $x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n}$, $n \geq 1$.

(b) $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n^3 + 2)$, $n \geq 1$.

(c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $n \geq 1$.

(d) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n}{1 + a_n}$, $n \geq 1$

10. Muestre que la siguiente secuencia es contractiva.

$$x_1, \; x_2 = 2, \; x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n), \; n \geq 3.$$

y concluya que es convergente.